Colección de Primeros Parciales (Versión 1.1)

Álgebra I

Matemática - Computación

Escrito y editado por: Gabriel R. (Estudiante de Lic. en Ciencias Matemáticas – FCEN UBA)

Introducción

En este documento te ofrezco algunos **primeros parciales** tomados en cuatrimestres anteriores en la materia de: **Álgebra I**, para las carreras de: Matemática y Computación. Esta materia se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. También te doy las respuestas, alguna sugerencia y la resolución de los mismos.

También te muestro los temas que entran para el primer parcial y la bibliografía recomendada por los docentes. Si buscas más info de la materia como fechas de exámenes, cursos y turnos disponibles, guías de ejercicios, etc. visitá la página oficial desde: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/

Podés encontrar más parciales en la fotocopiadora del Pabellón I (de ahí los saqué).

Para descargar más apuntes o la última actualización de este documento, visitá **FDX Maths**. Si tenés alguna sugerencia, o encontrás errores en cualquiera de los apuntes publicados, mandame un e-mail. También podés colaborar enviando algún otro parcial, final o examen libre de la materia.

Blog: www.fdxmaths.blogspot.com.ar

Facebook (Blog): www.facebook.com/fdxmaths

E-mail (Blog): fdxmaths@hotmail.com

Copyright

Temas del Programa que entran para el Primer Parcial

http://cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/algebraI

1) Operadores conjuntistas, unión, intersección, diferencia simétrica, complemento. Propiedades, ley de De Morgan. Producto cartesiano, n-uplas. Funciones, gráficos, biyecciones. Composición. Relaciones. Relaciones de equivalencia. Particiones. Conjuntos cociente.
2) Inducción completa. Definiciones inductivas.
3) Elementos de análisis combinatorio. Combinaciones, permutaciones. Combinaciones con repetición. Particiones.
4) Enteros, divisibilidad. Algoritmo de división. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Primos. Teorema fundamental de la aritmética. Factorización. Congruencias. Sistemas de numeración. Racionales e irracionales.

Régimen de Aprobación

Se deben aprobar los dos exámenes parciales. Para los alumnos que desaprueben alguno o ambos exámenes, habrá dos fechas de recuperación al finalizar el cuatrimestre. Se podrá rendir un solo parcial por fecha de recuperatorio, pudiendo los alumnos elegir cuál examen recuperar en cada fecha.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- Notas de las clases teóricas de Teresa Krick: Capítulo 1, Capítulo 2, Capítulo 3, Capítulo 4, Capítulo 5
- Notas de Ariel Pacetti y Matías Graña- PDF
- Conjuntos, relaciones y funciones, por Susana Puddu- PDF
- Números naturales, principio de inducción, por Susana Puddu- PDF
- Combinatoria, por Susana Puddu- PDF
- Números enteros, por Susana Puddu- PDF
- Números enteros, por Teresa Krick- PDF
- Números complejos, por Susana Puddu- PDF
- Polinomios, por Susana Puddu- PDF
- E. Gentile. Notas de Algebra (EUDEBA)
- E. Gentile. Estructuras algebraicas I. (Public. OEA)
- Birkhoff-Mc Lane. Algebra moderna.

Links de interés

Susana Puddu: http://mate.dm.uba.ar/~spuddu/Ppal.html

Teresa Krick: http://www.dm.uba.ar/materias/algebra_1/2004/1/

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL (19/12/01)

1.– Se denota por $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales **pares**. Se define la siguiente relación $\Re$ en el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$:

$$A \Re B \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq \mathbb{P}.$$

(a) Probar que el conjunto vacío está relacionado con $\mathbb{N}$ y con el conjunto de los números impares.
(b) Analizar si $\Re$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

2.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i} \leq n! + 1$$

3.– Sea la sucesión definida por

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 3, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\forall n \geq 2).$$

Conjeturar y probar una fórmula para el término general a_n utilizando los números de Fibonacci F_n (se recuerda que $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ y $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2$).

4.– ¿ Cuántas de las permutaciones de la palabra CONSTITUCION satisfacen que no aparecen dos O consecutivas ?

5.– Hallar el resto de la división por 15 de :

$$\sum_{k=0}^{50} 2^{k!}.$$

6.– Determinar, según los valores de $a \in \mathbb{Z}$, el valor de $(a^2 + 10 : 45)$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – PRIMER PARCIAL (19/10/02)

1. Sea X el conjunto de partes del conjunto $\{1,2,3,4,\ldots,100\}$ (es decir, los elementos de X son los subconjuntos de $\{1,2,3,4,\ldots,100\}$) y sea $\mathcal{R}$ la relación en X definida por

$$A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow A-\{1,2,4,5,6,8,9\}\subseteq B$$

i) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

ii) ¿Cuántos subconjuntos B de $\{1,2,3,4,\ldots,100\}$ satisfacen $\{1,2,3,4,\ldots,50\}\,\mathcal{R}\,B$?

2. Hallar todos los $a\in\mathbb{Z}$ tales que $(3a+2\,:\,6a^2-2a+1)\neq 1$.

3. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i+1}\,i!\leq\frac{(2n)!}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

4. Sea $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ la función definida por

$$f(n)=\begin{cases}\frac{3n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar}\\[2ex] \frac{n+4}{2} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

i) Determinar si f es inyectiva.

ii) Determinar si f es suryectiva y, si no lo es, hallar su imagen.

5. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 38 bolillas **numeradas** en 6 cajas distintas con la condición de que en la primera caja haya al menos dos bolillas?

6. Hallar todos los $a,b\in\mathbb{Z}$ que satisfacen $19\leq a+b\leq 68$ y $12a+22b=46$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL (16/12/02)

1. ¿Cuántos números pueden formarse permutando los dígitos de 1222234455779, con la condición de que tengan todos los dígitos pares juntos o tengan todos dígitos impares juntos.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 + 2.\, 3^{n+1}\, a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$ y $a_n \equiv 1\ (4)$.

3. Sean A, B, C conjuntos. Probar que $(A \cup B) - (B \cap C') = (A - B) \cup (B \cap C)$.

4. Determinar cuántas funciones **biyectivas**

$$f : \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \to \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

satisfacen que $f(i) \leq 2i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

5. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(2^n - 5^{2n+1} : 5^{2n} - 2^{n+1}) = 1$.

6. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la función definida por

$$f(a) = \begin{cases} 3a + 1 & \text{si } a \text{ es par} \\ \dfrac{3a-1}{2} & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva y hallar su imagen.

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I
Parcial I - 17/05/03
Tema 1

(1) En una sala hay 180 asientos dispuestos en 10 filas y 18 columnas.¿De cuántas formas se pueden sentar 7 hombres y 12 mujeres si no puede haber más de un hombre por fila ni por columna?

(2) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{n+i} \leq 5/3$$

(3) Hallar todas las soluciones enteras de
$$189x + 26y = 20$$
tales que x e y sean pares.

(4) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 1$. Hallar todos los valores posibles de
$$(4b^2 + a^2 : 2a^2 + 5b^2)$$

(5) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Se define el conjunto
$$X = \{(a_1, a_2, a_3, a_4)/a_i \in A \text{ y } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}$$
es decir, X es el conjunto de 4-uplas de elementos de A sin repetición. Sea R la relacion en X definida por
$$xRy \Leftrightarrow y \text{ es una permutación de } x$$
(a) Probar que R es una relación de equivalencia
(b) Determinar la cantidad de clases de equivalencia y el número de elementos de cada clase.

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – PRIMER PARCIAL (22/05/03)

1.– Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $f(n) = n^2 + 4$.
(a) ¿Es f inyectiva? ¿suryectiva? (justificar).
(b) Sea $\Re$ la relación en $\mathbb{N}$ definida por

$$n \,\Re\, m \iff f(n) \geq f(m).$$

Probar que $\Re$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva (es decir es una relación de orden).

2.– Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la sucesión de enteros definida por:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 5 \quad \text{y} \quad a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} - 2 \quad \forall\, n \geq 2.$$

Conjeturar y probar una fórmula cerrada para el término general a_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

3.– ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar 26 bolitas rojas (iguales) y 22 bolitas negras (iguales) en 8 cajas numeradas con las condiciones simultáneas de que cada caja contenga por lo menos 2 bolitas rojas y a lo sumo 20 bolitas negras ?

4.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $12 \mid n^4 + 2\,n^3 + 11\,n^2 - 2\,n$.

5.– Determinar todos los pares (x, y) de números enteros que verifican simultáneamente que

$$10\,x + 12\,y \mid 8 \quad \text{y} \quad 15\,x + 18\,y \mid 27.$$

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I - Primer Cuatrimestre 2003

Recuperatorio Primer Parcial - Tema 1

27/07/03

Apellido y nombre:

Número Libreta:

Turno:

1	2	3	4	5	Calif.

(1) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que

$$13a^{36} - 3b^{12} = c^{48}$$

Probar que $35|a.b.c$.

(2) Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)!(2i+1) > 2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$$

(3) Hallar todas las soluciones módulo 16 de la ecuación

$$10X \equiv 8\ (16)$$

(4) Se han invitado a 100 personas para una fiesta de casamiento. Se dipone de 10 mesas redondas con 10 sillas cada una. Si nos interesa armar los grupos que van en cada mesa y también nos interesa en qué orden están sentados en las mesas pero no en qué mesa se sienta cada grupo (es decir, mesas indistinguibles y personas distinguibles), ¿ de cuántas formas distintas se pueden ubicar?

(5) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Definimos en A la relación

$$a\mathcal{R}b \text{ si y sólo si la ecuación } X^2 \equiv a.b\ (p) \text{ tiene solución en } A$$

Probar que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – PRIMER PARCIAL (18/10/03)

1.– Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la función definida por $f(k) = k + (-1)^k$. Probar que f es biyectiva y determinar su función inversa f^{-1}.

2.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \le \frac{5}{6}.$$

3.– Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0 := 0,\ a_1 := 3 \quad \text{y} \quad a_{n+1} := a_n + 2\,a_{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Encontrar una fórmula para el término general y probarla.

4.– ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar 14 bolitas negras (iguales) y 10 bolitas rojas (iguales) en 7 cajas numeradas con las condiciones simultaneas de que ninguna caja esté vacía y que haya exactamente 3 cajas con sólo bolitas negras y las 4 restantes con sólo bolitas rojas ?

5.– Determinar todos los pares a, b de números enteros que verifican que

$$\sum_{k=1}^{100} (a + k\,b) = 30000.$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL (13/12/03)

1.– Sea $A := \{1,2,3,4,5,6\}$. Determinar todas las relaciones de equivalencia $\Re$ en A tales que:

$$(1,2) \in \Re,\ (2,5) \notin \Re,\ (3,6) \notin \Re,\ (4,1) \in \Re.$$

2.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\binom{2n}{n} \leq (n+1)!$$

3.– Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 := 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} := (\sqrt{a_n} - (n+1))^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_{2n-1} = a_{2n} = n^2$.

4.– ¿ Cuántas funciones suryectivas

$$f : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

se pueden definir si se pide además que el 1 tenga exactamente 3 antecedentes y el 2 exactamente 2 antecedentes ?

5.– Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(\,5\,a^2 - 5\,a + 5 : a^2 + a + 1\,) = 1.$$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL (20/12/03)

1.– Sea $\Re$ la relación en $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definida por

$$A \,\Re\, B \iff A \cap B \subseteq \mathbb{N}.$$

Estudiar si $\Re$ es una reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

2.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{2^i}) \;\geq\; 2-\frac{1}{2^n}.$$

3.– Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{i=n+1}^{2n} i \cdot i! = (2n+1)! - (n+1)!$$

4.– ¿ Cuántas números de exactamente 5 cifras hay que verifican simultáneamente que la suma de los dígitos es igual a 10 y que son múltiplos de 5 ?

5.– Resolver la ecuación diofántica

$$126\,X + 266\,Y = 588,$$

y hallar todas las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $x + y$ es un número primo.

Justifique todas sus respuestas.

Tema 1

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA 1 – RECUPERATORIO 1ER PARCIAL (21/07/04)

(1) Se define la siguiente relación $\Re$ en el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ de partes de $\mathbb{Z}$:

$$A \Re B \iff A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}.$$

Mostrar que $\Re$ es una relación de equivalencia y determinar todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}$ relacionados con el $\emptyset$ (o sea la clase de equivalencia de $\emptyset$).

(2) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 \geq \frac{n^5}{5}.$$

(3) ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras de PAPELON con la condición de que las tres vocales no estén juntas?

(4) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la función definida recursivamente por

$f(1) = 6, f(2) = 4$ y $f(n+2) = n(n+1)f(n+1) + 4\,f(n) - f(n+1)f(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Probar que $2^n \mid f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Es f suryectiva?

(5) Hallar los posibles valores de $(a^2 + a - 4 : a + 1)$ para $a \in \mathbb{Z}$ y para cada valor d hallado, determinar los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que $(a^2 + a - 4 : a + 1) = d$.

Justifique todas sus respuestas.

Tema 1

1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:

Turno: No. de libreta: Carrera:

ALGEBRA 1 – Recuperatorio Primer Parcial (30/07/04)

(1) Se define la siguiente relación $\Re$ en el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$:

$$A \,\Re\, B \iff A\Delta\{1\} \subseteq B\Delta\{1\}.$$

Estudiar si $\Re$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

(2) Probar que:

$$\binom{2n}{n} \geq 3n^2 \quad \forall\, n \geq 4.$$

(3) ¿Cuántas funciones se pueden determinar:

$$f : A = \{1,2,3,4,5,6,7\} \longrightarrow B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

si se tiene que cumplir simultáneamente que $f(1) \in \{2,4,6\}$ e $i < j$ en A implica que $f(i) < f(j)$ en B?

(4) Probar que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $32 \mid 17^n - 16n - 1$.

(5) Determinar según los valores de $a \in \mathbb{Z}$ los valores de $(3a^4 + 1 : a^2 - 1)$.

Justifique todas sus respuestas.

Algebra I
Primer Examen Parcial (23-10-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Se define en $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - d = c - b.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en A.

   ii) Si $(x, y) \in A$, determinar el cardinal de la clase de equivalencia de (x, y).

2. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)2^k = 2(2^n - 1) - n.$$

3. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 7 bolitas negras idénticas y 5 bolitas blancas numeradas de 1 a 5 en 6 cajas distintas, si deben ubicarse exactamente 2 bolitas en cada caja?

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a^2 + b^2 : 9072) = 504$ y $[5a + b : 336] = 1008$. Calcular $(a : b)$.

5. Hallar un número natural n, divisible por 17, tal que $n/2$ sea un cuadrado, $n/3$ sea un cubo, y $n/4$ sea una potencia quinta.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Primer Parcial (14-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^2 + 3b = b^2 + 3a.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   ii) Si $x \in \mathbb{Z}$, probar que existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \sim m$.

2. Hallar (y probar) una fórmula para el término general de la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por la siguiente recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 2 \\ x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

3. Sean $A = \{1, 2, \cdots, 10\}$ y $B = \{1, 2, \cdots, 20\}$. Calcular el número de funciones inyectivas $f : A \to B$ tales que $f(1) + f(4) + f(7) = 8$.

4. Hallar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $4 \mid a$, $8 \mid b$ y $31a + 9b = 128$.

5. Calcular el resto de dividir por 15 la suma de los divisores positivos de 8^{21}.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Primer Parcial (22-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Sea X un conjunto de 20 elementos y sea Y un subconjunto de X de 9 elementos. Se define en $\mathbb{P}(X)$ la siguiente relación:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap Y = B \cap Y.$$

   i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   ii) Calcular el cardinal de la clase de equivalencia de $\emptyset$.

2. Si $n \in \mathbb{N}_0$, demostrar que

$$\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{3^i} = \frac{3^{n+1} - 1}{2.3^{2n}}\,.$$

3. ¿ De cuántas maneras pueden ubicarse 5 letras A, 7 letras B y 8 letras C en 6 renglones ?

4. Hallar <u>todos</u> los pares $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tales que $a < b \leq 90$, $(a : b) = 10$ y $a + b \equiv 5 \ (25)$.

5. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a^2 - 1 : 15) = 1$. Probar que $45 \mid a^2(a^2 + 16)$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

Algebra I
Recuperación Primer Parcial (28-12-04)

Nombre y apellido:
Turno:

1	2	3	4	5

Tema 1

1. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f((a,b)) = 2a - 5b$.

   i) Determinar una función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(g(a)) = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

   ii) ¿ Es f inversible ?

2. Demostrar que
$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Calcular el número de permutaciones de las letras de la palabra
$$ENCICLOPEDIA$$
en las cuales las letras E y L no ocupan lugares contiguos.

4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n/3 \leq m < n/2$. Calcular el cociente y el resto de dividir $m + n$ por $n - m$.

5. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(a : 275) = 5$. Calcular $(a^2 + 3a + 25 : 121a)$.

Nota. Justifique debidamente todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 2

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – PRIMER PARCIAL (21/05/05)

1. Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión definida por

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 12a_{n-1} - 27a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Probar que si $n \geq 1$ entonces 3^{n-1} divide a a_n pero 3^n no.

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinar cuántas relaciones $\mathcal{R}$ en A satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

$\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y, para cada $x \in A$, $(2, x) \in \mathcal{R}$ si y sólo si x es par.

3. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5a - 3 : 7a^2 - a + 1) \neq 1$

4. Probar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $19.14^k + 1$ no es primo. Sugerencia: ver congruencias módulo 3 y módulo 5.

5. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i! \geq 5.2^n - 7$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

6. ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar 23 bolitas **numeradas** en 5 cajas de manera que la segunda caja contenga exactamente 5 bolitas y la primera caja contenga a lo sumo una bolita?

Justifique todas sus respuestas.

Nombre y Apellido:
Número de libreta:
Turno:

Algebra I - 2005 - Primer Cuatrimestre

2do. Recuperatorio del Primer Parcial

Tema 1

28/07/05

1. ¿Cuántos números que sean divisibles por cuatro se pueden formar permutando los dígitos de 11114444235?

2. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto U. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Para las que lo sean dar una demostración, para las que sean falsas dar un contraejemplo.

i) $A \cap B \cap C \subseteq A - (B - C)$

ii) $(A \cap B) \triangle (B \cap C) = [B - (A \cup C)]' \cap B$

3. Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división por 36 de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)\, i!$

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $23a \equiv 13\ (9)$. Probar que $(2a^3 + 3a^2 - 3a + 7 : a^2 + a - 2) = 1$.

5. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2[a_n + (n-1)\, n!]$$

Probar que $a_n = 2n! - 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = 12a - 65b$. Determinar si f es inyectiva o suryectiva.

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Nombre y Apellido:
Número de libreta:
Turno:

Algebra I - 2005 - Primer Cuatrimestre

1er. Recuperatorio del Primer Parcial

Tema 1 **17/09/2005**

1. Sean

$K_1 = \{$palabras de 4 letras que se pueden formar con las letras de AFLOJATE$\}$
$K_2 = \{$palabras de 4 letras que se pueden formar con las letras de CATALOGO$\}$
Determinar el número de elementos de $K_1 \cap K_2$ y de $K_1 \cup K_2$

2. Sea $\simeq$ la relación en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por

$$A \simeq B \text{ si y sólo si } \{3, 5, 7\} \subseteq (A \triangle B)'$$

Probar que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

3. Probar que $(2.7^n - 11^n : 7^n + 3.7^n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$

4. Probar que la ecuación $7x^2 + 2 = y^3$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$

5. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Conjeturar una fórmula para el término general y probarla por inducción.

6. Probar que $\binom{2n}{n} > n.2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

POR FAVOR, JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA – PRIMER PARCIAL (17/10/05)

1.– Sea $A = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{100}) \,/\, x_i = 0 \text{ ó } 1 \text{ y } x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 10\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{100}y_{100} = 0$$

Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. En cada caso justificar la respuesta.

2.– ¿Cuántas funciones **inyectivas** $f : \{1, 2, 3, \dots, 50\} \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, 80\}$ hay que satisfagan <u>simultáneamente</u> las condiciones

- $f(1)$ es par
- $f(2) = 4$
- $f(3) \le 6$

3.– Sea $(a_n)_{n \ge 0}$ la sucesión definida inductivamente por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \ (n \ge 2)$$

i) Probar que $a_{n+6} = a_n$ para todo $n \ge 0$

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{255} a_k$

4.– ¿De cuántas maneras pueden colocarse 17 bolitas rojas y 22 bolitas negras en 8 cajas numeradas con la condición de que la primera caja debe contener exactamente 3 bolitas negras, la tercera caja debe contener al menos 2 bolitas rojas y la quinta caja no puede quedar vacía?

5.– Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $53 \mid a$ y $(a : b) = 1$. Probar que $a + 5b$ y $10a - 3b$ son coprimos.

6.– Hallar todos los $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a + b + c = 35$ y $13a + 27b + 2c = 176$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL (12/12/05)

1. Sea $A = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a \equiv 1\ (7)\}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por

$$f(a) = \begin{cases} 3a+2 & \text{si } a \text{ es par} \\ 3a-1 & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

i) Probar que f es inyectiva
ii) Probar que $\operatorname{Im}(f) = \{b \in \mathbb{Z} \,/\, b \equiv 2\ (6) \text{ y } b^2 \equiv 4\ (7)\}$

2. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=2n}^{4n} (-1)^i . i^2 = 10\,n^2 + n$

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Determinar el valor de a_n para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y probarlo por inducción.

4. ¿Cuántas palabras de 6 letras que tengan a lo sumo una letra repetida se pueden formar con las letras de TENTACION?

5. Sea $A = \{2, 16, 30, 44, 58, \ldots, 6988\}$. Determinar cuántos múltiplos de 18 hay en A.

6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a + 7b : 2a - 3b) = 5$ entonces $(a : b) = 5$.

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5	6

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

TURNO: NO. DE LIBRETA: CARRERA:

ALGEBRA I – SEGUNDO RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL (21/12/05)

1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff (A\cup B)\cap\{1,2,3\}\subseteq (A\cap B)\cap\{1,2,3\}$$

Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. En cada caso justificar la respuesta.

2. Probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}\frac{i}{i+1}\leq 2n-1$ para todo $n\geq 2$

3. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 15 bolitas rojas **indistinguibles** y 19 bolitas verdes **numeradas** en 10 cajas distintas con la condición de que en cada caja haya al menos una bolita roja y en la tercera caja haya por lo menos 4 bolitas verdes?

4. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una mesa circular 13 familias, cada una integrada por padre, madre y un hijo, con la condición de que los 3 integrantes de cada familia se sienten juntos?

5. Sea $a\in\mathbb{Z}$ tal que $a\equiv 3\ (4)$. Hallar $(13\,a^{n+1}+7a\ :\ 8a^n+4)$, para cada $n\in\mathbb{N}$

6. Hallar todos los $a,b\in\mathbb{Z}$ tales que $5\mid a$, $8\mid b+1$ y $3a+10b=55$

Justifique todas sus respuestas.

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 8 a 13 | 14 a 17 | 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
1º Parcial (16/10/2010)

1. Sea $X = \{1, 2, \dots, 91, 92\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 92\}$. Se define en X la relación

$$x \,\Re\, y \iff x^2 + 93\,y = y^2 + 93\,x.$$

   a) Probar que para todo $x \in X$ se tiene que $x \,\Re\, (93 - x)$, y probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

   b) Dado $x \in X$, determinar la clase de equivalencia de x, y deducir la cantidad de clases de equivalencia que hay en total.

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot i! \;<\; n \cdot (n+1)!$$

3. Contar todos los anagramas de la palabra COMBINATORIA que satisfacen

   a) que todas las vocales están juntas y todas las consonantes están juntas;

   b) que las vocales conservan el orden relativo OIAOIA original.

   (Nota: los dos incisos son independientes.)

4. a) Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$ los posibles valores de $(a^2 - 7a + 2 : a - 6)$ son $1,\ 2$ y 4.

   b) Para cada uno de los valores posibles, $d = 1$, $d = 2$ y $d = 4$, determinar para qué $a \in \mathbb{Z}$ se tiene $(a^2 - 7a + 2 : a - 6) = d$.

5. Determinar todos los $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente

$$5\,a \equiv 3 \pmod{7} \quad \text{y} \quad 4\,a + 10\,b = 26.$$

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 8 a 11 | 14 a 17 | 20 a 22

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
1er Recuperatorio – 1er Parcial (10/12/2010)

---

1. Sea $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0,0)\}$. Se define en X la relación

$$(a,b) \,\Re\, (c,d) \iff a\,d = b\,c.$$

   a) Probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

   b) Determinar las clases de equivalencia de $(0,1)$, $(1,2)$ y $(3,6)$.

---

2. Sea la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2,\ a_2 = 5 \ \text{ y } \ a_{n+2} = a_{n+1} + 2\sqrt{a_n - 1} + 3,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Conjeturar una fórmula cerrada para a_n y probar su validez.

---

3. Contar la cantidad de números naturales de exactamente 4 cifras que son divisibles por 5 y que además satisfacen que la suma de sus dígitos da 10.

---

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ *coprimos*. Determinar los posibles valores de $(a^2 + b^2 : a + b)$, y para cada valor d hallado, determinar para cuáles $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos se tiene $(a^2 + b^2 : a + b) = d$.

---

5. Determinar todos los $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente

$$9 \,|\, a, \quad 3 \,|\, b \quad \text{y} \quad 22\,a + 10\,b = 48.$$

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre:
Libreta: Turno: 8 a 11 14 a 17 20 a 22

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2010
1er Recuperatorio – 1er Parcial (15/12/2010)

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida por $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   a) ¿Es inyectiva? ¿suryectiva? ¿biyectiva?

   b) Se define en $\mathbb{N}$ la relación $n \,\Re\, m \iff f(n) + f(m) \le 2nm$.
   ¿Es reflexiva? ¿simétrica? ¿transitiva?

   (Demostrar cada respuesta afirmativa y dar un contraejemplo para cada respuesta negativa.)

2. Probar que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge 3$, se satisface
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \ge \frac{n^3 + 4n}{3}.$$

3. Contar la cantidad de subconjuntos A del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ que satisfacen que

   a) $\{1, 2, 3\} \subset A$ y $\{4, 5, 6\} \cap A = \emptyset$.

   b) A contiene exactamente dos números pares y $\#(A) = 6$.

   (Nota: los dos incisos son independientes.)

4. Probar que para todo $a \in \mathbb{Z}$, se tiene que
$$(a^3 - a + 1 \ : \ 3a^3 + 3a + 3) = 1.$$

5. Determinar todos los $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que satisfacen
$$\sum_{i=1}^{10} (ia + 2b) = 690.$$

Justifique todas sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 11 a 14 | 14 a 17 | 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2011

1er Parcial (15/10/2011)

---

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 20\}$ y sea $Y = \{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq 9\}$.
Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ entre los subconjuntos de X:
$$A \mathcal{R} B \iff A \cap Y = B \cap Y.$$
(a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
(b) Describir la clase de equivalencia del conjunto $A = \emptyset$ y contar cuántos elementos tiene.

---

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

---

3. (a) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 25 bolitas rojas **indistinguibles** en 5 cajas distintas, con la condición de que haya exactamente una caja vacía?
(b) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 25 bolitas rojas **indistinguibles** y 13 bolitas verdes **numeradas** en 5 cajas distintas, con la condición de que haya a lo sumo una caja sin bolitas rojas?

---

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $(a : b) = 5$.
Determinar todos los valores posibles de $(2a + 3b : a - 2b)$, y dar un ejemplo de a y b para cada valor hallado.

---

5. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente:
$$16\,a + 30\,b = 62 \quad \text{y} \quad 49 \mid 7\,a.$$

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 11 a 14 | 16 a 19 | 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 1er Cuatrimestre 2012

1er Parcial (18/5/2012)

---

1. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ la relación:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \triangle Y \subseteq \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

   (a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. ¿Es antisimétrica?

   (b) ¿Cuántos elementos hay en la clase de equivalencia de $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 6\}$?

---

2. Dada la función $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(m) = \begin{cases} 3m+2 & \text{si } m \leq 2 \\ m^3 & \text{si } m > 2 \end{cases}$,

   (a) Decidir si f es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

   (b) Sea $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $g(n) = (n-8)^2$. Determinar

$$\{k \in \mathbb{Z} : (g \circ f)(k) = 9\}.$$

---

3. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{2n} i2^{i-n} = 2^{n+1}(2n-1) - 2n + 2.$$

---

4. Dadas las cifras 1112334566666, ¿cuántas permutaciones se pueden armar si el 2 y el 5 no pueden estar juntos y además todos los números 1 tienen que estar a la izquierda de todos los números 3?

---

5. Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(2.5^n - 2^{n+2} : 5^{n+1} + 7.2^n) = 1$ o 17. Dar un ejemplo para cada caso.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012

1er Parcial (13/10/2012)

---

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación $\mathfrak{R}$ de la siguiente forma:

$$A \,\mathfrak{R}\, B \iff \text{ el conjunto } A \triangle B \text{ tiene a lo sumo 2 elementos.}$$

   (a) Determinar si $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

   (b) Si $A = \{1, 2\}$, calcular la cantidad de conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$tales que $A \,\mathfrak{R}\, B$.

---

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (3i + 1)2^{i-1} > n^3.$$

---

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 83 bolitas iguales en 5 casilleros numerados del 1 al 5 si en los casilleros pares debe haber una cantidad par de bolitas y en los impares una cantidad impar de bolitas?

---

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(3 : n) = 1$, $(5n + 3^{n+1} : 4n - 3^n) = 1$ o 17.

---

5. Definimos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como: $a_1 = 14$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ para todo $n \geq 1$. Probar que la sucesión

$$b_n := \sqrt{3(a_n^2 - 4)},$$

satisface que b_n es entero y además divisible por 4 para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

6. Se extraen dos números a y b; el número a se extrae del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y el número b del conjunto $\{1, \ldots, 15\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación de congruencia

$$ax \equiv b \pmod{15}$$

tenga al menos una solución? ¿Y de que tenga exactamente una solución módulo 15?

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio Primer Parcial (10/12/2012)

1. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la función $f(x, y) = (2x + 3y, 5x + 6y)$.
   (a) Probar que $\text{Im}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ a \equiv b(3)\}$.
   (b) Sea $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
$$g(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-y}{3}, y\right) & \text{si } x \equiv y(3) \\ (x,y) & \text{si no.} \end{cases}$$
   Determinar si g es inyectiva y si $g \circ f$ es inyectiva.

2. Probar que si $n \geq 5$, $\binom{2n}{n} \geq (n+5)^2$.

3. Definimos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la siguiente relación R: decimos que a esta relacionado con b (y notamos $a\,R\,b$) si existe un primo p tal que p divide a a y p divide a b.
   (a) ¿Es R reflexiva? ¿Es R simétrica? ¿Es R transitiva?
   (b) Calcular $\{a \in \mathbb{Z} \ : \ a\,R\,0\}$.

4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$ tal que $(5 : b) = 1$.
   (a) Probar que $d = (5^n + 6b + 30 : 5^{n+1} + 7b + 35) = 1$ ó 23.
   (b) Para $n = 1$, hallar todos los $b \in \mathbb{Z}$ tales que $d \neq 1$.

5. ¿De cuantas maneras pueden sentarse 5 matrimonios alrededor de una mesa redonda (con 10 sillas) con la condición...
   - ... que todas las parejas estén juntas?
   - ... que los integrantes de cada pareja estén enfrentados?

6. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

Justificar todas las respuestas

1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: 11 a 14 | 14 a 17 | 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio Primer Parcial (17/12/2012)

---

1. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z}$ definida por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + kb^2 \equiv 0(2).$$

   (a) Hallar todos los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

   (b) Para los valores de k que cumplen el ítem anterior, hallar todas las clases de equivalencia de $\mathcal{R}$.

---

2. Cuatro grupos de personas, $G_1, \ldots . G_4$, se juntan a trabajar en una mesa redonda con 12 asientos. Los grupos G_1 y G_2 están formados por 4 personas y los gupos G_3 y G_4 están formados por 2 personas. ¿De cuantas maneras se pueden ubicar en la mesa sabiendo que los integrantes de cada grupo se sientan consecutivamente?

---

3. Probar que si $(a : b) = 1$, entonces

$$(a + b : a^2 - ab + b^2) = 1 \text{ o } 3.$$

---

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, el número $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$ es un número entero.

---

5. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x + 9y & \text{si } x \geq y, \\ 15x - 35y & \text{si } x < y. \end{cases}$$

   (a) Decidir si f es inyectiva o no.

   (b) Calcular la imagen de f.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA I

TEMA 1

18 de Mayo de 2013

LU $N°$	Apellido y Nombre

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. Se define la siguiente relación entre subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A\mathcal{R}B \text{ si y solo si } A\triangle B \text{ no contiene ningún múltiplo de 3.}$$

   a) Probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
   b) ¿Cuántos conjuntos $A \subseteq \{1, 2, 3, ..., 89\}$ de 3 elementos cumplen que $A\mathcal{R}\{26, 27\}$?

2. Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ y $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 4n - 4$, conjeturar una fórmula para el término general a_n y demostrarla.

3. Se distribuyen al azar 13 monedas de un peso y 3 monedas de dos pesos entre cinco personas entre las que se encuentra Melisa. Calcular la probabilidad de que Melisa reciba al menos 2 pesos.

4. Probar que si $(a : b) = 2$, entonces $(a^2 + 2b^2 + 10 : 20) = 2$.

Justifique todas las respuestas.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I
PREFINAL (15/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $A = \{f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tal que f es función$\}$.
   Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por:
   $$f\,\mathcal{R}\,g \iff f(1) = g(1).$$
   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
   b) Sea $f \in A$ una función dada. ¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

2. Se recuerda que la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ está definida por
   $$F_0 = 0, F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$
   Dado $m \in \mathbb{N}_0$, probar que $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Sean $a,\ b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen que el resto de dividir a a por b es 140 y el resto de dividir a $3b$ por 140 es 105. Calcular $(a : b)$ y expresarlo como combinación lineal entera de a y b en función de los cocientes q_1 de dividir a a por b y q_2 de dividir a $3b$ por 140.

PARTE 2:

1. Determinar todos los pares a, b de números enteros que satisfacen que
   $$\sum_{k=1}^{100}(a + k\,b) \;=\; 40000.$$

2. Calcular el resto de dividir a $6^{66^{666}}$ por 71.

3. *a*) Determinar un polinomio mónico cuyas raíces sean exactamente las raíces primitivas de la unidad de orden 6.
   b) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
   $$X^2 - X + 1 \mid X^{5n} + X^n + 1.$$

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:
NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I
RECUPERATORIO DEL PREFINAL (20/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(X)$ en la forma
$$A \mathcal{R} B \iff A \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = B \cup \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$
   a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describir por comprensión la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   b) ¿Cuántos elementos tiene la clase $\overline{A}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por
$$a_1 = 1\ , \quad (n^2 - 2n + 1)a_{n-1} = (n^2 - 1)a_n, \ \forall n \geq 2.$$
   Hallar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.
   a) Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.
   b) Caracterizar para qué $a, b \in \mathbb{Z}$ el máximo común divisor da cada uno de los valores hallados.

PARTE 2:

1. Hallar todos los primos positivos p tales que
$$3^p + 7^{p-1} \equiv -25(p).$$

2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz primitiva de la unidad de orden 91. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$\begin{cases} \omega^{14n} &= \omega^7 \\ \omega^{39n} &= \omega^{26}. \end{cases}$$

3. a) Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales el polinomio $f = X^6 + aX^3 + 1$ tiene raíces complejas múltiples.
   b) Para cada $a \in \mathbb{R}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.

1	2	3	4	5	6	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE:

NO. DE LIBRETA: CARRERA:

Álgebra I

RECUPERATORIO DEL PREFINAL (27/03/2014)

PARTE 1:

1. Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales pares. Se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de partes de $\mathbb{N}$:
$$A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow (A \cap B) \cup (A' \cap B') \subseteq \mathcal{P}.$$
   a) Analizar si $\emptyset \mathcal{R} \mathbb{N}$, $\emptyset \mathcal{R} \mathcal{I}$ y $\mathbb{N} \mathcal{R} \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ es el conjunto de los números impares.
   b) Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por
$$a_0 = 2 \ , \ a_1 = 3 \ \text{ y } \ a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$
   Hallar una fórmula cerrada para a_n y probarla.

3. Probar que no existen $x, y \in \mathbb{Q}$ que satisfacen la relación $x^2 + y^2 = 3$.

PARTE 2:

1. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
$$2^n \equiv 38^n \ (70).$$

2. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz primitiva de la unidad de orden 10. Calcular
$$(\omega - 1) \cdot \big(\omega^{104} + \overline{\omega}^3 + \omega^{-9} + \frac{1}{\omega^8} + |\omega|\big).$$

3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ la sucesión de polinomios definida recursivamente por
$$\begin{cases} f_1 &= X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8, \\ f_{n+1} &= (X+1)f_n(X)^2 + X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 14X^2 + 12X - 8, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 2 es raiz de f_n de multiplicidad exactamente 3.

Para aprobar es necesario tener por lo menos 1 ejercicio de cada parte Bien.